

文章编号: 1000-7598 (2011) 03-879-06

有自由面渗流分析的三维数值流形方法

姜清辉^{1,2}, 邓书申², 周创兵²

(1. 武汉大学 土木建筑工程学院武汉 430072; 2. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

摘 要: 提出了求解有自由面渗流问题的三维数值流形方法, 通过构造任意形状流形单元的水头函数, 推导了流形单元的渗透矩阵和无压渗流分析的总体控制方程, 并给出了自由面的迭代求解策略和渗透体积力的计算方法。典型算例的数值分析表明, 该方法采用数学网格覆盖整个材料区域, 在自由面的迭代求解过程中数学网格保持不变, 只考虑自由面以下渗流区的介质, 只对自由面以下的流形单元形成总体渗透矩阵, 具有精度高、收敛速度快、编程简单等优点, 而且能够通过单纯形积分精确计算被自由面穿越单元的渗透作用力, 因此, 特别适用于有自由面渗流问题的模拟。

关 键 词: 三维渗流; 数值流形方法; 自由面; 数学网格; 流形单元

中图分类号: O342

文献标识码: A

Three-dimensional numerical manifold method for seepage problems with free surfaces

JIANG Qing-hui^{1,2}, DENG Shu-shen², ZHOU Chuang-bing²

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan, 430072, China;

2. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, 430072, China)

Abstract: A three-dimensional numerical manifold method for seepage problems with free surfaces is proposed. The hydraulic potential functions for arbitrarily shaped manifold element are constructed and the element conductivity matrix is derived in detail. The global governing equations for unconfined seepage analysis are established by minimizing the flow dissipation energy. The proposed method employs the tetrahedral mathematical meshes to cover the whole material volume. In the process of iterative solving for locating the free surface, the numerical manifold method can strictly realize the seepage analysis of the saturated domain on the condition of mathematical meshes keeping unchanged. Furthermore, the seepage force acting on the transitional elements cut by the free surface can be accurately calculated by the manifold method. Therefore, the proposed method is featured in high accuracy, fast convergence rate and simple programming, especially applicable to simulate the unconfined seepage problem with free surface.

Key words: three-dimensional seepage; numerical manifold method; free surface; mathematical mesh; manifold element

1 引 言

在采用传统的有限元方法求解无压渗流问题时, 主要存在两类解法: 调整网格法和固定网格法。前者在每一个迭代中都需要重新生成网格, 通常计算量较大, 并且在调整网格的过程中容易导致网格畸形和计算结果的不收敛, 因此, 正被固定网格法所取代。固定网格法包括有: Desai-Li 的剩余流量法^[1], 张有天等的初流量法^[2], Bathe 和 Khoshgoftaar 的调整渗透系数法^[3], 周创兵等提出的加密高斯点方法^[4]以及 Brezis、Lacy、郑宏等的变分不等式方

法^[5-7]。

对于无压渗流问题, 渗流仅在自由面以下的湿区运动, 采用固定网格的有限元方法进行渗流分析时, 由于有限单元网格固定并且单元的形状是规则的, 那些被自由面穿越的单元仍被整体纳入到渗流区域的计算, 但这些单元有一部分区域位于自由面之上的干区, 并不是实际的渗流区域, 因此, 固定网格的有限元法存在先天性的不足。不妨定义有自由面穿越的单元为过渡单元, 在 Bathe 的渗透矩阵调整法中, 试图通过调整过渡单元的渗透系数来逼近真实的渗流场, 即将过渡单元自由面以上区域(虚

收稿日期: 2009-12-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 50839004, No.51079110); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(No. NCET-07-0632)。

第一作者简介: 姜清辉, 男, 1972 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土力学数值计算方法与岩土工程稳定分析方面的教学与研究工作。

E-mail: jqh1972@yahoo.com.cn

域)的渗透系数取为 $k/1\,000$ (k 为实际材料的渗透系数),自由面以下区域(实域)的渗透系数取为 k ,该过渡单元的渗透系数按虚域与实域的体积相对比例来确定。这在一定程度上改变了自由面附近单元的渗透特性,并且自由面穿越单元的水上部分对自由面附近的节点水头仍有贡献。

石根华^[8]提出的数值流形方法(NMM)是利用现代数学和流形的有限覆盖技术建立起来的一种数值计算方法。该方法基于数学覆盖和物理覆盖,通过权函数联结在一起形成问题域上的总体位移函数。在数值流形方法中,采用不同的覆盖组合,可以解决比解析法、有限元和非连续变形分析方法更具普遍意义的复杂问题。本文将运用到三维无压渗流分析中,采用四面体有限单元网格覆盖整个材料区域,在自由面的迭代求解过程中,数学覆盖保持不变(即对应的有限元网格不变),只考虑渗流区的介质,即在计算过程中仅对自由面以下的流形单元形成总体渗透矩阵,从而使得数值模拟变得更加准确和简便。

2 无压渗流问题基本方程与边界条件

如图 1 所示,对于有自由面的无压渗流问题,区域 Ω ($\Omega = \Omega_w \cup \Omega_d$) 上的渗流实际上仅在自由面 Γ_f 以下的湿区 Ω_w 中运动。显然,当自由面 Γ_f 确定时,湿区 Ω_w 也就随之确定。然而,自由面 Γ_f 在实际工程问题中一般是未知的,需要在计算中通过迭代确定。

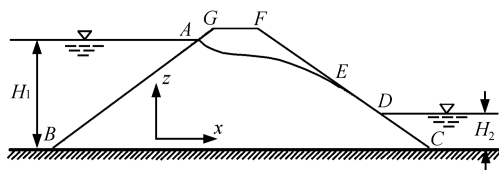


图 1 有自由面的土坝渗流问题
Fig.1 Illustration of seepage flow with free-surface through a soil dam

流动区域内任何一点的总水头 H 定义为

$$H = z + p/\gamma_w, \text{ 在 } \Omega_w \text{ 内} \quad (1)$$

式中: z 为垂直坐标分量; p 为孔隙水压力; γ_w 为的单位重度。

根据 Darcy 定理,在流动区域内的流速可表示为

$$\mathbf{v} = -k\nabla H \quad (2)$$

式中: k 为材料的渗透张量; ∇ 为梯度算子。

水在湿区 Ω_w 内的流动应满足连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ 在 } \Omega_w \text{ 内} \quad (3)$$

同时也满足下列边界条件:

(1) 水头边界条件

$$H = \bar{H}, \text{ 在 } \Gamma_h = AB + CD \text{ 上} \quad (4)$$

式中: $\bar{H}$ 为水头边界 Γ_h 上的已知水头,在上、下游面分别为 H_1 和 H_2 。

(2) 流量边界条件

$$q_n \equiv -\mathbf{n}^T \mathbf{v} = \bar{q}, \text{ 在 } \Gamma_q = BC \text{ 上} \quad (5)$$

式中: $\bar{q}$ 为流量边界 Γ_q 上的已知流量(规定流出为负); $\mathbf{n}$ 为边界上的单位外法线向量。

(3) 自由面边界条件

$$H = z, q_n = 0, \text{ 在 } \Gamma_f = AE \text{ 上} \quad (6)$$

(4) 出渗面边界条件

$$H = z, q_n \leq 0, \text{ 在 } \Gamma_s = DE \text{ 上} \quad (7)$$

3 无压渗流分析的三维流形方法

3.1 流形单元的水头函数

如图 2 所示,对三维数值流形方法而言,若采用四面体有限单元网格作为数学覆盖,则一个流形单元由 4 个物理覆盖(广义节点)组成,即四面体有限单元的 4 个节点被称之为流形单元的物理覆盖或广义节点^[9-10]。值得注意的是,与有限单元不同,流形单元可以有任意形状,并且包含在有限单元之内,其角点坐标和广义节点坐标可以不重合。也就是说,一个流形单元有两套标记,一套是该流形单元的广义节点,另外一套是该流形单元的角点。流形单元的广义节点定义了求解自由度和权函数,角点定义了流形单元的块体形状和积分区域。当流形单元的广义节点坐标和角点坐标重合时,此时的流形单元退化成传统的有限单元。

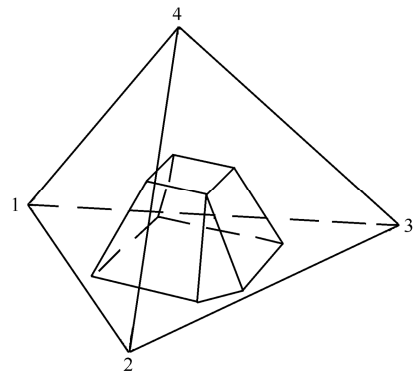


图 2 四面体有限单元覆盖的三维流形单元
Fig.2 A three-dimensional manifold element with tetrahedron element covers

假定流形单元 e 广义节点上的水头函数为常数, 记为

$$\mathbf{h}^e = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4]^T \quad (8)$$

式中: $h_i (i=1\sim 4)$ 分别为流形单元广义节点上的常值水头。

流形单元内任一点 $\mathbf{x}(x, y, z)$ 的水头值可由 4 个广义节点的水头函数加权平均得到, 即通过权函数 $w_i(\mathbf{x})$ 连接在一起, 因此, 流形单元的水头函数可以表示为

$$H(\mathbf{x}) = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4] \mathbf{h}^e = \mathbf{T} \mathbf{h}^e \quad (9)$$

式中: $\mathbf{T}$ 为流形单元的权函数矩阵, 在此取对应的四面体有限单元的形函数作为权函数, 显然其满足流形方法对权函数的基本要求:

$$\left. \begin{aligned} w_1(\mathbf{x}) &= f_{11} + f_{12}x + f_{13}y + f_{14}z \\ w_2(\mathbf{x}) &= f_{21} + f_{22}x + f_{23}y + f_{24}z \\ w_3(\mathbf{x}) &= f_{31} + f_{32}x + f_{33}y + f_{34}z \\ w_4(\mathbf{x}) &= f_{41} + f_{42}x + f_{43}y + f_{44}z \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $f_{ij} (i, j=1\sim 4)$ 为 16 个与流形单元的广义节点坐标有关的常数。

由于定义在流形单元广义节点上的水头函数是常数, 因此, 在流形单元内任一点的水头函数是坐标 (x, y, z) 的线性函数。

3.2 流形单元渗透矩阵

确定流形单元 e 的水头插值函数后, 根据 Darcy 定理, 单元内任意一点的流速可表示为

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} \nabla H = -\mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{h}^e \quad (11)$$

式中: $\mathbf{B}$ 为几何矩阵。

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{T} = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{bmatrix} \quad (12)$$

流形单元 e 内的渗流能量可表示为

$$I^e(\mathbf{h}^e) = \iiint_{\Omega_e} \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{h}^e)^T \mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{h}^e dx dy dz = \frac{V}{2} (\mathbf{B} \mathbf{h}^e)^T \mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{h}^e \quad (13)$$

式中: V 为流形单元的体积, 可通过单纯形积分得到^[11]。采用的单纯形积分, 一个任意形状的流形单元体积可以用其角点坐标的解析形式表达。

对 $I^e(\mathbf{h}^e)$ 求导使其极小化, 可得流形单元 e 的渗透矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial I^e(\mathbf{h}^e)}{\partial \mathbf{h}^e} = V \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} \quad (14)$$

3.3 总体控制方程

对于有自由面的无压渗流问题, 只需对自由面以下的渗流区域进行分析。假定湿区被离散成 m 个流形单元, 为了满足整个湿区内渗流能量 $I(\mathbf{h})$ 为极小的条件, 有:

$$\frac{\partial I(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \sum_{e=1}^m \frac{\partial I^e(\mathbf{h}^e)}{\partial \mathbf{h}^e} = 0 \quad (15)$$

对渗流场的所有流形单元求得渗透矩阵后, 叠加形成总体渗透矩阵。对于已知水头边界的节点将形成常数项, 通过式 (15) 的计算后, 将常数项移到等号右端, 得到未知水头节点的线性代数方程组, 用矩阵形式可表示为

$$\mathbf{K} \mathbf{h} = \mathbf{q} \quad (16)$$

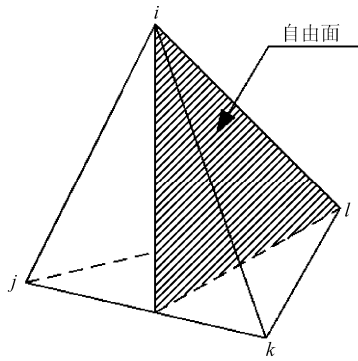
式中: $\mathbf{K}$ 为整体渗透矩阵; $\mathbf{h}$ 为未知水头节点的水头列向量; $\mathbf{q}$ 为已知水头节点形成的常数列向量。

3.4 自由面切割形成的流形单元

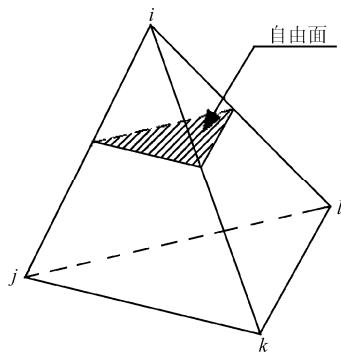
进行渗流分析时, 首先采用四面体有限单元网格, 即流形单元的数学网格覆盖整个材料区域。对于有自由面的无压渗流问题, 整个材料区域在计算过程中可以划分为 3 个子区域: Ω_1 、 Ω_2 和 Ω_3 。 Ω_1 为完全处于自由面以下的有限单元所组成的区域; Ω_2 为有自由面穿越的有限单元所组成的区域; Ω_3 为完全处于自由面以上的有限单元所组成的区域。

根据流形单元的定义, 当一个有限单元内部有物理边界或节理、裂隙穿过时, 有限单元被划分成两个或多个流形单元; 否则, 该有限单元和流形单元重合。由于自由面可以看成是两种不同介质 (干区和湿区) 的分界线, 对于 Ω_2 区域, 被自由面穿越后, 一个有限单元被切割成 2 个流形单元, 渗流分析时仅考虑自由面以下的流形单元。如图 3 所示, 对于四面体的有限单元网格, 被自由面切割形成的流形单元主要有以下 3 种类型, 即 2 个面相交、3 个面相交、4 个面相交。

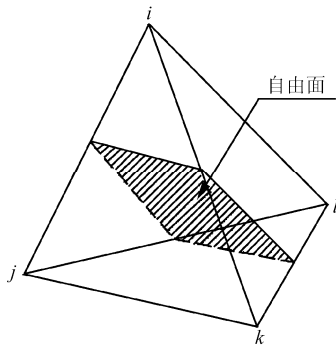
对于 Ω_1 和 Ω_3 区域, 这些部位有限单元与流形单元重合, 即流形单元退化成常规的有限单元。由于 Ω_3 区域不是实际渗流区域, 该部位的流形单元不参与计算。因此, 在形成总体渗透矩阵时, 只考虑自由面以下的流形单元, 在数学网格 (即对应的有限单元网格) 保持不变的情况下能够精确地实现对渗流区域 Ω_w 的分析, 而不涉及到干区 Ω_d 。



(a) 自由面与有限单元的 2 个面相交



(b) 自由面与有限单元的 3 个面相交



(c) 自由面与有限单元的 4 个面相交

图 3 自由面切割形成的流形单元

Fig.3 A finite element is cut into two manifold elements by free-surface

3.5 自由面位置的确定

对于有自由面边界的渗流问题,其自由面的位置事先是未知的,需要通过迭代求解确定。每次计算得到流形单元各广义节点上的水头值,如果某一节点的水头值大于其位置高程,说明该节点位于自由面以下;如果某一节点的水头值小于其位置高程,说明该节点位于自由面之上,自由面的位置由其穿越的有限单元网格确定。如图 4 所示,假定四面体单元的节点 i 位于自由面之上, j 、 k 、 l 位于自由面以下,则根据 i 、 j 两点的坐标及水头值可求出自由面与棱边 ij 的交点 a 的坐标。

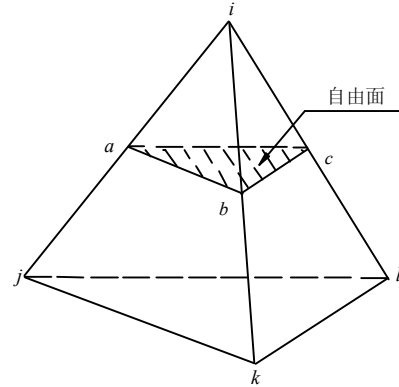


图 4 自由面的定位

Fig.4 Location of the free-surface

令

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i &= |h_i - z_i| \\ \Delta_j &= |h_j - z_j| \\ \Delta\alpha &= \Delta_j / (\Delta_i + \Delta_j) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: h_i 、 h_j 分别为节点 i 、 j 的水头值; z_i 、 z_j 分别为节点 i 、 j 的位置高程。

则交点 a 的坐标为

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_j + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\Delta\alpha \quad (18)$$

同理,可求出自由面与棱边 ik 和 il 的交点坐标,这样就可以确定穿过有限单元网格的自由面 abc 以及自由面以下的流形单元 $abcjkl$ 。

采用四面体有限单元网格覆盖整个材料区域之后,在自由面的迭代求解过程中,数学网格保持不变(即对应的有限元网格不变),每次试算确定自由面的位置,并选取自由面以下的区域作为下次计算的区域,直至自由面的位置稳定时停止迭代计算过程。收敛条件为前后 2 次计算得到的自由面水头差小于给定误差。

3.6 渗透体力的计算

渗流分析的任务之一是计算渗流荷载,评价建筑物及其基础的稳定性。在采用固定网格的有限元法求解有自由面的渗流问题时,对于被自由面穿越的过渡单元,很难准确计算其在渗流作用下的等效节点力。周创兵^[4]、郑宏等^[12]曾建议根据自由面上下高斯点的位置和数目来近似计算过渡单元的渗透作用力。由于流形单元可为任意形状,且采用单纯形积分,因此,可严格计算过渡单元在渗透作用下引起的等效节点力,这对于流-固耦合分析也是较为有用的。

渗流场中任一微元体所受到得单位体积的渗透力为

$$\mathbf{f} = -\gamma_w \nabla H \quad (19)$$

对任一形状的流形单元 e , 在渗透作用下引起的等效节点力为

$$\mathbf{F}^e = -\iiint_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \gamma_w \nabla H dx dy dz = -\left(\iiint_{\Omega_e} [N_1 \mathbf{I} \quad N_2 \mathbf{I} \quad N_3 \mathbf{I} \quad N_4 \mathbf{I}]^T dx dy dz\right) \gamma_w \mathbf{B} \mathbf{h}^e \quad (20)$$

式中: $\mathbf{N}$ 为流形单元对应的四面体有限覆盖单元的形函数矩阵; $\mathbf{I}$ 为 3 阶单位矩阵。

为了得到渗透荷载等效节点力的解析表达式, 需要采用单纯形积分。由于流形单元为一任意形状的多面体, 假定流形单元 e 含有 s 个表面多边形, 令 $p_1^{[i]} p_2^{[i]} p_3^{[i]} \dots p_{n(i)}^{[i]}$ ($i=1, 2, 3, \dots, s$) 为其表面多边形角点, 则有下列的单纯形积分公式:

$$V_x = \iiint_{\Omega_e} x dx dy dz = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^s \sum_{k=2}^{n(i)-1} \begin{vmatrix} x_1^{[i]} & y_1^{[i]} & z_1^{[i]} \\ x_k^{[i]} & y_k^{[i]} & z_k^{[i]} \\ x_{k+1}^{[i]} & y_{k+1}^{[i]} & z_{k+1}^{[i]} \end{vmatrix} (x_1 + x_k + x_{k+1}) \quad (21)$$

$$V_y = \iiint_{\Omega_e} y dx dy dz = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^s \sum_{k=2}^{n(i)-1} \begin{vmatrix} x_1^{[i]} & y_1^{[i]} & z_1^{[i]} \\ x_k^{[i]} & y_k^{[i]} & z_k^{[i]} \\ x_{k+1}^{[i]} & y_{k+1}^{[i]} & z_{k+1}^{[i]} \end{vmatrix} (y_1 + y_k + y_{k+1}) \quad (22)$$

$$V_z = \iiint_{\Omega_e} z dx dy dz = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^s \sum_{k=2}^{n(i)-1} \begin{vmatrix} x_1^{[i]} & y_1^{[i]} & z_1^{[i]} \\ x_k^{[i]} & y_k^{[i]} & z_k^{[i]} \\ x_{k+1}^{[i]} & y_{k+1}^{[i]} & z_{k+1}^{[i]} \end{vmatrix} (z_1 + z_k + z_{k+1}) \quad (23)$$

式中: $(x_k^{[i]}, y_k^{[i]}, z_k^{[i]})$ 是流形单元 e 第 i 个表面多边形上第 k 个角点的坐标。

令

$$\zeta_i = \iiint_{\Omega_e} N_i dx dy dz = \iiint_{\Omega_e} (f_{i1} + f_{i2}x + f_{i3}y + f_{i4}z) dx dy dz = f_{i1}V + f_{i2}V_x + f_{i3}V_y + f_{i4}V_z \quad (24)$$

式中: $i=1 \sim 4$ 。

则渗透荷载等效节点力的解析表达式为

$$\mathbf{F}^e = -\gamma_w \begin{bmatrix} \zeta_1 \mathbf{B} \mathbf{h}^e \\ \zeta_2 \mathbf{B} \mathbf{h}^e \\ \zeta_3 \mathbf{B} \mathbf{h}^e \\ \zeta_4 \mathbf{B} \mathbf{h}^e \end{bmatrix} \quad (25)$$

4 数值算例

基于本文所建立的四面体网格覆盖的三维数值流形方法分析格式, 采用面向对象的程序设计方法, 使用 Visual C++ 语言结合 OpenGL 编制了三维渗流分析流形元计算程序 3DS-NMM, 并用多个算例对程序进行了考察。

如图 5 所示, 有一个均质土坝, 假定其底部不透水, 该例的 Pavlovsky 的经验解为

$$Z = (23.2^2 - 5.3X)^{1/2} \quad (26)$$

式中: Z 为自由面高度。

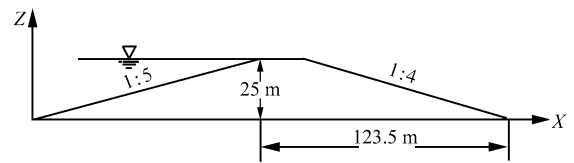


图 5 梯形均质土坝问题

Fig.5 Seepage of a homogeneous earth dam

进行渗流分析时, 首先采用四面体的有限单元网格覆盖整个材料区域 (见图 6), 自由面的空间位置由程序 3DS-NMM 通过计算迭代确定。图 7 给出了分别由 Pavlovsky 解、Lacy-Prevost 解、变分不等式解^[7]以及流形方法所确定的自由面位置。由图 7 可见, 数值流形方法所给出自由面位置和具有严格数学基础的变分不等式解趋于一致, 相对于 Lacy-Prevost 的计算结果更加逼近于 Pavlovsky 经验解, 因此, 流形方法给出计算结果是合理的。

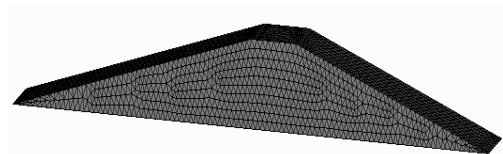


图 6 四面体的有限单元覆盖

Fig.6 Tetrahedral finite element covers for the earth dam

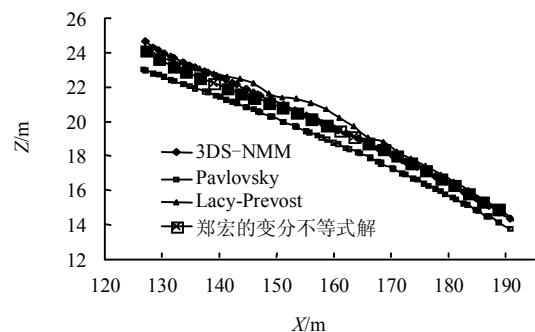


图 7 自由面位置的比较

Fig.7 Comparison of locations of the free surface from different approaches

5 结 语

本文发展了无压渗流分析的三维数值流形方法,采用四面体有限单元网格作为流形方法的数学覆盖,给出了有限单元被自由面切割后形成的流形单元类型。通过构造流形单元的水头函数,推导了流形单元的渗透矩阵和无压渗流分析总体控制方程,并给出了渗透作用力的计算公式,在此基础上编制了3DS-NMM计算程序,并将其应用到均质土坝的渗流分析。

在自由面迭代计算时,流形方法可以保持数学网格不变,仅对自由面以下的渗流区域进行分析,由于流形单元可为任何形状,克服了有限元方法中需要调整过渡单元渗透系数的缺点,保证了自由面迭代计算的精度。采用流形方法进行无压渗流分析,可以严格计算被自由面穿越的过渡单元所受到渗透作用力,这对于评价建筑物及其基础在渗流作用下的稳定问题以及流固耦合分析都是较为有用的。

参 考 文 献

- [1] DESAI C S, LI G C. A residual flow procedure and application for free surface in porous media[J]. **Advances in Water Resources**, 1983, 6(1): 27—35
- [2] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988, 8(1): 18—26.
ZHANG You-tian, CHEN Ping, WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1988, 8(1): 18—26.
- [3] BATHE K J, KHOSHGOFTAAR M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1979, 3(1): 13—22.
- [4] 周创兵, 熊文林, 梁业国. 求解无压渗流场的一种新方法[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 1996, 11(5): 528—534.
ZHOU Chuang-bing, XIONG Wen-ling, LIANG Ye-guo. A new method for the solution unconfined seepage field[J]. **Journal of Hydrodynamics**, 1996, 11(5): 528—534.
- [5] BREZIS H, KINDERLEHRER D, STAMPACCHIA G. Sur une nouvelle formulation due probleme de l'ecoulement a travers une digue[J]. **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris (Series A)**, 1978, 287: 711—714.
- [6] LACY S J, PREVOST J H. Flow through porous media: a procedure for locating the free surface[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1987, 11(6): 585—601.
- [7] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, et al. A new formulation of Signorini's type for seepage problems with free surfaces[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 64: 1—16.
- [8] SHI G H. Manifold method[C]// Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation, Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media. Albuquerque: TSI Press, 1996: 52—204.
- [9] 姜清辉, 周创兵. 四面体有限单元覆盖的三维数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4455—4460.
JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method with tetrahedron finite element covers[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(24): 4455—4460.
- [10] 姜清辉, 周创兵. 三维数值流形方法的点-面接触模型[J]. 计算力学学报, 2006, 23(5): 4455—4460.
JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing, ZHANG Yu. A model of point-to-face contact for three-dimensional numerical manifold method[J]. **Chinese Journal of Computation Mechanics**, 2006, 23(5): 4455—4460.
- [11] SHI G H. Simplex integration for manifold method, FEM, DDA and analytical analysis[C]// Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media, Albuquerque: TSI Press, 1996, 205—262.
- [12] 郑宏, 葛修润, 谷先荣, 等. 关于岩土工程有限元分析中的若干问题. 岩土力学, 1995, 16(3): 7—12
ZHENG Hong, GE Xiu-run, GU Xian-rong, et al. Some problems in FEA for geotechnical engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1995, 16(3): 7—12.